EX 30 : $f : M(z) \to M'(z')\ tq : z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$; $z \neq 0$

1)

M est invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M \in \varsigma(O,1)$

L'ensemble des points invariants par f est le cercle $\zeta(0,1)$

2) $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{1}{\bar{z}.z} = \dfrac{1}{|z|^2} \in IR$ D'où O, M et M' sont alignés.

$OM.OM' = |z|.|z'| = |z|.\left|\dfrac{1}{\bar{z}}\right| = |z|.\dfrac{1}{|\bar{z}|} = |z|.\dfrac{1}{|z|} = 1$

3)a) $z_A = 4; z_B = 2+2i; z_C = 2-2i; z_I = 2$

$$IA = |z_A - z_I| = |2| = 2 \Rightarrow A \in \varsigma(I,2)$$
$$IB = |z_B - z_I| = |2i| = 2 \Rightarrow B \in \varsigma(I,2)$$
$$IC = |z_C - z_I| = |-2i| = 2 \Rightarrow C \in \varsigma(I,2)$$

b)

$z_{A'} = \dfrac{1}{\bar{z}_A} = \dfrac{1}{\bar{4}} = \dfrac{1}{4}$ $z_{B'} = \dfrac{1}{\bar{z}_B} = \dfrac{1}{2-2i} = \dfrac{1+i}{4}$ $z_{C'} = \dfrac{1}{\bar{z}_C} = \dfrac{1}{2+2i} = \dfrac{1-i}{4}$

$\dfrac{aff\left(\overrightarrow{A'B'}\right)}{aff\left(\overrightarrow{A'C'}\right)} = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_{C'} - z_{A'}} = \dfrac{\dfrac{i}{4}}{-\dfrac{i}{4}} = -1 \in IR \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ *sont colinéaires*

Par suite A', B' et C'appartiennent a une même droite Δ.

$x_{A'} = x_{B'} = x_{C'} = \dfrac{1}{4}$ D'où $\boxed{\Delta : x = \dfrac{1}{4}}$

4)a) $\left|\dfrac{1}{2} - z'\right| = |z'| \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\dfrac{1}{\bar{z}}\right| \Leftrightarrow \left|\dfrac{\bar{z}-2}{2\bar{z}}\right| = \dfrac{1}{|\bar{z}|} \Leftrightarrow \dfrac{|\bar{z}-2|}{2|\bar{z}|} = \dfrac{1}{|\bar{z}|} \Leftrightarrow |\overline{z-2}| = 2 \Leftrightarrow |z-2| = 2$

b) $M \in (\zeta) \Leftrightarrow |z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|z' - \dfrac{1}{2}\right| = |z'| \Leftrightarrow JM' = OM'$ *avec* $J\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow M' \in med[OJ]$.

Donc l'image par f du cercle ς est la droite médiatrice de [OJ]

Qarray.tn-Aqra Blech- Qarray.tn